

Lecția 3: Coordonatele Carteziene și Transformări Geometrice în Cadastru și Arhitectură

Obiective: Elevii vor înțelege sistemele de coordonate, transformările geometrice și aplicarea lor în redactarea și interpretarea planurilor cadastrale și arhitecturale.

I. PARTEA TEORETICĂ

1. De la Teren la Hartă: Nevoia de un Sistem de Referință

Problema: Cum reprezentăm poziția exactă a unui punct pe o hartă sau plan?

Soluția: Sistemul de coordonate carteziene - inventat de René Descartes, permite localizarea precisă a oricărui punct prin două numere (x, y) .

2. Sistemul de Coordonate Carteziene în Topografie

În topografie, sistemul este adaptat pentru a măsura pe teren:

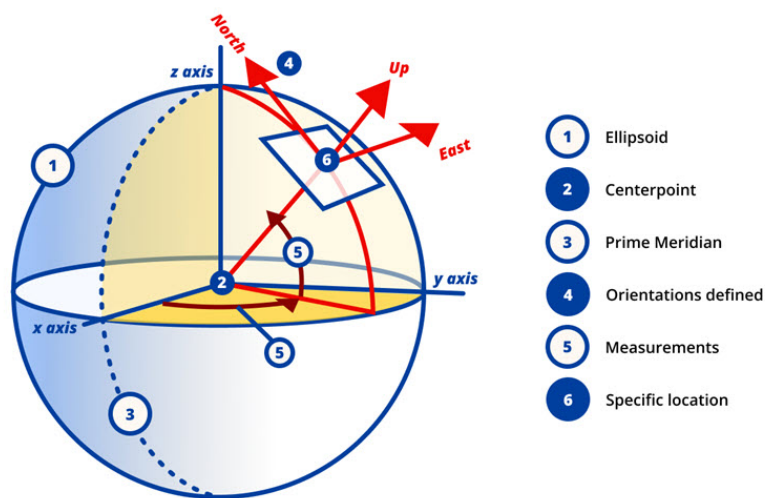


Figura 1: Sistemul de coordonate topografic cu axele orientate diferit față de matematica clasică.

Particularități ale sistemului topografic:

- Axa OX = direcția Est (abscisa)
- Axa OY = direcția Nord (ordonata)
- Originea (0,0) = un punct de referință stabilit (de obicei în colțul sud-vestic al zonei măsurate)

- Unitatea de măsură = metrul

Exemplu practic: Pe un plan cadastral, un punct are coordonatele (125.45, 87.30). Înseamnă că se află la:

- 125.45 metri Est de originea aleasă
- 87.30 metri Nord de originea aleasă

3. Scara: Legătura între Plan și Realitate

Definiție: Scara reprezintă raportul dintre o distanță de pe plan și distanța corespunzătoare din realitate.

$$\text{Scara} = \frac{\text{Distanța_pe_plan}}{\text{Distanța_reală}}$$

Exemple comune de scări:

- 1:100 - 1 cm pe plan = 100 cm (1 m) în realitate (planuri arhitecturale)
- 1:500 - 1 cm pe plan = 500 cm (5 m) în realitate (planuri cadastrale urbane)
- 1:1000 - 1 cm pe plan = 1000 cm (10 m) în realitate (planuri extraurbane)
- 1:25000 - 1 cm pe plan = 250 m în realitate (hărți topografice)

Calcul practic:

Dacă scara este 1:500 și pe plan măsurăm 3.5 cm:

$$\text{Distanța reală} = 3.5 \text{ cm} \times 500 = 1750 \text{ cm} = 17.5 \text{ metri}$$

Raportul ariilor: Dacă raportul liniar este k , atunci raportul ariilor este k^2 !

Exemplu: La scara 1:200, o suprafață de 4 cm^2 pe plan reprezintă:

$$\text{Arie reală} = 4 \text{ cm}^2 \times 200^2 = 4 \times 40.000 = 160.000 \text{ cm}^2 = 16 \text{ m}^2$$

4. Transformări Geometrice Esențiale în Cadastru

A) Translația (Deplasarea)

Definiție: Mutarea tuturor punctelor unei figuri cu aceeași distanță pe aceeași direcție.

Formule:

$$(x', y') = (x + t_x, y + t_y)$$

unde (t_x, t_y) este vectorul de translație.

Aplicație practică: Când un plan întreg trebuie mutat pentru a se potrivi cu un sistem de coordonate național.

Exemplu: Dacă un teren trebuie raportat la un nou punct de referință, toate coordonatele se translatează cu aceeași valoare.

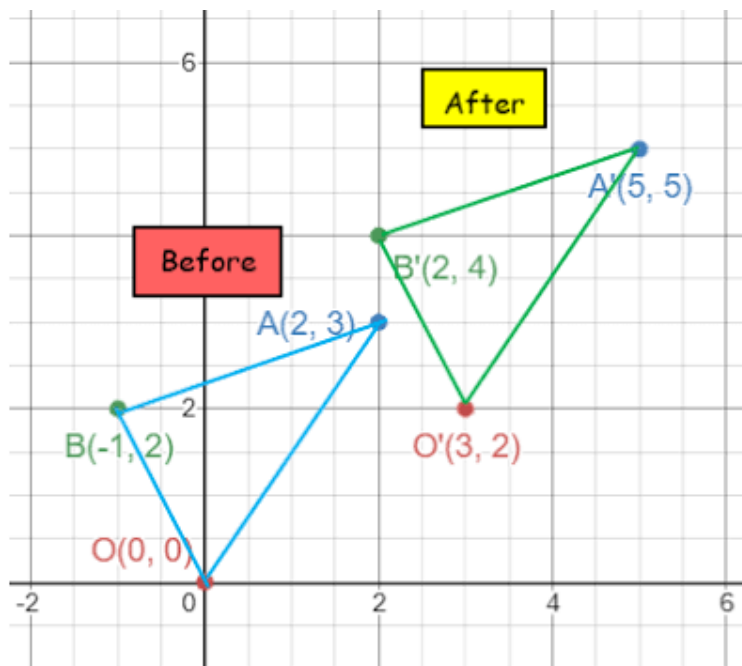


Figura 2: Translația unui triunghi cu vectorul $(3, 2)$.

B) Rotația

Definiție: Întoarcerea tuturor punctelor în jurul unui centru cu un unghi dat.

Formule pentru rotație în jurul originii cu unghiul θ :

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$y' = x \sin \theta + y \cos \theta$$

Aplicație practică: Corectarea orientării unui plan care a fost scanat ușor înclinat sau alinierea la direcția Nord adevărat.

Exemplu numeric: Rotirea punctului $(2, 0)$ cu 90° :

$$x' = 2 \cos 90^\circ - 0 \sin 90^\circ = 0$$

$$y' = 2 \sin 90^\circ + 0 \cos 90^\circ = 2$$

Noul punct: $(0, 2)$.

C) Simetria (Reflexia)

Definiție: Obținerea imaginii în oglindă față de o axă sau un punct.

Formule pentru simetrie față de axa OX:

$$(x', y') = (x, -y)$$

Aplicație practică: Corectarea planurilor scanate invers sau crearea de planuri simetrice în arhitectură.

5. Aplicații în Arhitectură și Urbanism

Proiectarea cu Simetrie

Clădirile importante folosesc adesea simetria axială pentru estetică:



Figura 3: Exemple de simetrie în arhitectura clasică.

Exemple:

- Palate (simetrie față de axa centrală)
- Biserici (simetrie față de axa longitudinală)
- Fațade (ferestre și decorațiuni simetrice)

Transformări în Proiectare

Arhitecții folosesc transformări pentru:

- Repetarea modulelor (translație)
- Rotirea anexelor față de corpul principal
- Crearea variantei în oglindă a unei clădiri

II. EXEMPLU REZOLVAT COMPLET

Problema: Un teren dreptunghiular este reprezentat pe un plan cadastral vechi la scara 1:1000. Coordonatele vârfurilor pe acest plan sunt:

- A(2.5, 1.5) cm
- B(7.5, 1.5) cm

- C(7.5, 4.5) cm
- D(2.5, 4.5) cm

Planul trebuie actualizat și integrat în sistemul de coordonate național, care necesită:

- Conversia la scara 1:500
- Translație astfel încât punctul A să ajungă în $A'(100, 100)$ metri în sistemul național
- Rotație de $+30^\circ$ pentru corectarea orientării

Cerințe:

- 1) Calculează dimensiunile reale ale terenului (în metri)
- 2) Determină noul vector de translație
- 3) Calculează coordonatele punctului C după toate transformările

REZOLVARE DETALIATĂ:

Pasul 1: Calculul dimensiunilor reale la scara originală

La scara 1:1000:

$$1 \text{ cm pe plan} = 1000 \text{ cm} = 10 \text{ m în realitate}$$

Dimensiuni pe plan (în cm):

$$AB = 7.5 - 2.5 = 5.0 \text{ cm}, \quad AD = 4.5 - 1.5 = 3.0 \text{ cm}$$

Dimensiuni reale:

$$L = 5.0 \cdot 10 = 50.0 \text{ m}, \quad l = 3.0 \cdot 10 = 30.0 \text{ m}$$

Pasul 2: Conversia la noua scară (1:500) și transformare în coordonate metrice

Coordonatele reale ale punctelor (în metri) față de originea veche:

$$A : (2.5 \cdot 10, 1.5 \cdot 10) = (25.0, 15.0)$$

$$B : (7.5 \cdot 10, 1.5 \cdot 10) = (75.0, 15.0)$$

$$C : (7.5 \cdot 10, 4.5 \cdot 10) = (75.0, 45.0)$$

$$D : (2.5 \cdot 10, 4.5 \cdot 10) = (25.0, 45.0)$$

Pasul 3: Determinarea vectorului de translație

Avem $A(25, 15)$ și dorim $A'(100, 100)$:

$$(t_x, t_y) = (100 - 25, 100 - 15) = (75, 85)$$

Aplicăm translația:

$$A' = (25 + 75, 15 + 85) = (100, 100)$$

$$B' = (75 + 75, 15 + 85) = (150, 100)$$

$$C' = (75 + 75, 45 + 85) = (150, 130)$$

$$D' = (25 + 75, 45 + 85) = (100, 130)$$

Pasul 4: Aplicarea rotației de $+30^\circ$ în jurul lui A'

Pentru $C'(150, 130)$:

$$C_{rel} = (150 - 100, 130 - 100) = (50, 30)$$

Cu $\cos 30^\circ \approx 0.8660$, $\sin 30^\circ = 0.5$:

$$x_{rot} = 50 \cdot 0.8660 - 30 \cdot 0.5 = 43.30 - 15 = 28.30$$

$$y_{rot} = 50 \cdot 0.5 + 30 \cdot 0.8660 = 25 + 25.98 = 50.98$$

Revenim:

$$C_{final} = (100 + 28.30, 100 + 50.98) = (128.30, 150.98)$$

Pasul 5: Verificarea dimensiunilor după rotație

Distanța $A'C_{final}$:

$$\Delta x = 28.30, \Delta y = 50.98$$

$$d = \sqrt{28.30^2 + 50.98^2} = \sqrt{800.89 + 2598.96} = \sqrt{3399.85} \approx 58.31 \text{ m}$$

Diagonala originală:

$$\sqrt{50^2 + 30^2} = \sqrt{3400} \approx 58.31 \text{ m} \checkmark$$

Răspuns final:

- Dimensiuni reale: $50 \text{ m} \times 30 \text{ m}$
- Vector translație: $(75, 85)$ metri
- $C_{final} \approx (128.30, 150.98)$ metri

III. SET DE 10 EXERCII PENTRU LECȚIE (cu rezolvări complete)

Exercițiul 1 (Scară și distanță)

Enunț: Pe o hartă topografică la scara 1:25000, distanța dintre două localități este de 8.4 cm. Care este distanța reală în kilometri?

Rezolvare:

$$1 \text{ cm} = 25000 \text{ cm} = 250 \text{ m}$$

$$D = 8.4 \cdot 250 = 2100 \text{ m} = 2.1 \text{ km}$$

Explicație: Convertim întotdeauna la aceeași unitate.

Exercițiul 2 (Translație simplă)

Enunț: Coordonatele punctului M pe un plan sunt (125.6, 87.3). După o translație cu vectorul (-12.5, +8.7), care sunt noile coordonate?

Rezolvare:

$$(x', y') = (125.6 - 12.5, 87.3 + 8.7) = (113.1, 96.0)$$

Exercițiul 3 (Scară și arie)

Enunț: Un teren de 2.5 hectare (1 ha = 10.000 m²) este reprezentat pe un plan. La ce scară este planul dacă terenul ocupă 100 cm² pe plan?

Rezolvare:

$$A_{real} = 2.5 \cdot 10.000 = 25.000 \text{ m}^2 = 250.000.000 \text{ cm}^2$$

$$\frac{A_{real}}{A_{plan}} = \frac{250.000.000}{100} = 2.500.000$$

$$k = \sqrt{2.500.000} \approx 1581.14 \Rightarrow \text{Scara} \approx 1 : 1580$$

Explicație: Raportul liniar este rădăcina pătrată a raportului ariilor.

Exercițiul 4 (Vector translație)

Enunț: După o translație, punctul P(45.2, 78.9) ajunge în P'(32.7, 85.4). Cu ce vector s-a translat?

Rezolvare:

$$\vec{t} = (x' - x, y' - y) = (32.7 - 45.2, 85.4 - 78.9) = (-12.5, 6.5)$$

Exercițiul 5 (Rotație de 90°)

Enunț: Un segment are azimutul inițial 45°. Cu cât se modifică azimutul după o rotație a întregului plan cu +90°?

Rezolvare:

$$Az_{nou} = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$$

Modificarea = +90°.

Exercițiul 6 (Rotație în jurul originii)

Enunț: Punctul A(3, 4) se rotește cu 180° în jurul originii. Care sunt noile coordonate?

Rezolvare: Pentru 180°, $\cos 180^\circ = -1$, $\sin 180^\circ = 0$:

$$x' = 3(-1) - 4 \cdot 0 = -3, \quad y' = 3 \cdot 0 + 4(-1) = -4$$

$$A' = (-3, -4)$$

Exercițiul 7 (Scară și reprezentare)

Enunț: Dacă un teren de 800 m^2 este reprezentat pe un plan printr-un pătrat cu latura de 4 cm , la ce scară este planul?

Rezolvare:

$$\begin{aligned}A_{plan} &= 4^2 = 16 \text{ cm}^2, & A_{real} &= 800 \text{ m}^2 = 8.000.000 \text{ cm}^2 \\ \frac{A_{real}}{A_{plan}} &= \frac{8.000.000}{16} = 500.000 \\ k &= \sqrt{500.000} \approx 707.1 \Rightarrow \text{Scara} \approx 1 : 700\end{aligned}$$

Exercițiul 8 (Centru de greutate)

Enunț: Un dreptunghi are pe plan coordonatele colțurilor: $(12, 8)$, $(28, 8)$, $(28, 18)$, $(12, 18)$. Care este centrul său de greutate (intersecția diagonalelor)?

Rezolvare: Punctul mediu între $(12, 8)$ și $(28, 18)$:

$$x_c = \frac{12 + 28}{2} = 20, \quad y_c = \frac{8 + 18}{2} = 13$$

Centrul = $(20, 13)$.

Exercițiul 9 (Transformare compusă)

Enunț: Transformarea $(x', y') = (2x - 1, 3y + 2)$ este o combinație între omotetie (scalare) și translație. Ce se întâmplă cu punctul $(0, 0)$?

Rezolvare:

$$x' = 2 \cdot 0 - 1 = -1, \quad y' = 3 \cdot 0 + 2 = 2$$

Punctul devine $(-1, 2)$.

Exercițiul 10 (Simetrie)

Enunț: Un triunghi echilateral are centrul în origine. Câte poziții distincte are prin rotații de 120° în jurul centrului său?

Rezolvare: Un triunghi echilateral are simetrie de rotație de ordinul 3. Poziții distincte: 3 (la 0° , 120° , 240°). La 360° revine la poziția inițială.

IV. SET DE 10 EXERCITII PENTRU ACASĂ (TEMA)

1. Problemă de scară: Pe un plan arhitectural la scara $1:50$, o cameră apare ca un dreptunghi de $6 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$. Care sunt dimensiunile reale ale camerei în metri?
2. Transformare de coordonate: Un punct are coordonatele $(245.30, 178.45)$ în sistemul vechi. Pentru a-l trece în noul sistem, se aplică translația $(-15.75, +22.80)$. Care sunt noile coordonate?

3. Rotație față de un punct diferit de origine: Punctul B(8, 6) se rotește cu 90° în jurul punctului A(2, 3). Calculează coordonatele lui B după rotație.
4. Scară pe hărți digitale: Pe ecranul unui calculator, o hartă la scara 1:10000 este afișată cu zoom 200%. Care este scara efectivă vizualizată?
5. Coordonate relative: Într-un sistem local, un teren are colțurile: A(0,0), B(40,0), C(40,25), D(0,25). Dacă A corespunde cu punctul (125000, 487000) în sistemul național, care sunt coordonatele naționale ale punctului C?
6. Arie la scară: Un teren triunghiular are în realitate aria de 1200 m^2 . La scara 1:500, care este aria sa pe plan (în cm^2)?
7. Transformare compusă: Un punct P(x,y) este supus succesiv la:
 - Translația (3, -2)
 - Rotația cu 90° în jurul originii
 - Translația (-1, 4)

Exprimă coordonatele finale $P'(x',y')$ în funcție de x și y.

8. Simetrie axială: Punctul Q(5, 7) este reflectat față de axa orizontală care trece prin $y=2$. Care sunt coordonatele sale după reflexie?
9. Problemă de orientare: Pe un plan scanat, o latură care ar trebui să aibă azimutul 0° (Nord) apare cu azimutul 5° . Ce rotație trebuie aplicată întregului plan pentru corectare?
10. Aplicație urbanistică: Două parcele vecine sunt reprezentate ca dreptunghiuri. Parcela 1: A(10,10), B(30,10), C(30,20), D(10,20). Parcela 2 este simetrică parcelei 1 față de axa $x=25$. Care sunt coordonatele parcelei 2?

V. REZOLVĂRI SCHEMATICE PENTRU TEMA

1. $6 \cdot 50 = 300 \text{ cm} = 3 \text{ m}$; $4 \cdot 50 = 200 \text{ cm} = 2 \text{ m} \Rightarrow 3 \text{ m} \times 2 \text{ m}$
2. $(245.30 - 15.75, 178.45 + 22.80) = (229.55, 201.25)$
3. $B_{rel} = (8 - 2, 6 - 3) = (6, 3)$; rotit: $(-3, 6)$; absolut: $(2 - 3, 3 + 6) = (-1, 9)$
4. $\text{Zoom } 200\% = \text{scara} \div 2 \Rightarrow 1:5000$
5. $C_{national} = (125000 + 40, 487000 + 25) = (125040, 487025)$
6. $\text{Raport arii} = 500^2 = 250000$; $A_{plan} = 1200/250000 = 0.0048 \text{ m}^2 = 48 \text{ cm}^2$
7. După translația 1: $(x + 3, y - 2)$; după rotație: $(-(y - 2), x + 3) = (-y + 2, x + 3)$; după translația 2: $(-y + 1, x + 7)$
8. Distanța față de axă: $7 - 2 = 5$; după reflexie: $y' = 2 - 5 = -3$; $Q' = (5, -3)$
9. Rotație de -5° (sau $+355^\circ$)

10. Simetrie față de $x=25$: $x' = 25 + (25 - x) = 50 - x$; Parcela 2: A'(40,10), B'(20,10), C'(20,20), D'(40,20)